Crescita di rivestimenti di varietà a curvatura negativa

Il termine *entropia* fu per la prima volta usato dal fisico Rudolf Clausius nel suo "Trattato sulla teoria meccanica del calore" del 1864 per descrivere una proprietà comune a tutti i sistemi fisici noti allora: ogni trasformazione all'interno di un dato sistema avviene in modo da aumentare il "disordine" del sistema in questione. Negli anni il concetto espresso da Rudolf si evolse e venne espresso in termini matematici. In geometria con il termine entropia si fa solitamente riferimento all'*entropia topologica* di un sistema dinamico che ne misura in un certo senso la complessità. Noi invece con la parola entropia intenderemo l'*entropia volumetrica* di una varietà Riemanniana (o di un suo opportuno sottoinsieme discreto) che stima la crescita dei volumi delle palle di centro un punto fissato. Tale nozione di entropia ci fornisce pertanto una stima della complessità delle varietà in termini di quanto velocemente crescano all'infinito i volumi delle palle: se i volumi delle palle crescono esponenzialmente in funzione del raggio l'entropia volumetrica non è altro che il limite del rapporto tra l'esponente di tale funzione ed il raggio quando quest'ultimo tende a $+\infty$ (pertanto solo varietà di volume infinito possono avere entropia non nulla). Ciò che è sorprendente è che le due nozioni di entropia, quella topologica e quella volumetrica, apparentemente così distinte, sono invece intimamente legate. Anthony Manning dimostra infatti che l'entropia volumetrica del rivestimento universale di una varietà Riemanniana compatta X_0 è sempre minore o uguale dell'entropia topologica del flusso geodetico di X_0 e che vale l'uguaglianza nel caso in cui X_0 abbia curvatura minore o uguale a zero.

In questa tesi intendiamo mostrare come l'entropia volumetrica, che indicheremo con la lettera ω, di ogni rivestimento metrico normale di una varietà Riemanniana compatta sia strettamente inferiore all'entropia del rivestimento universale metrico della stessa. Tale risultato è dovuto ad Andrea Sambusetti, il quale dimostra il seguente teorema:

Teorema. *Sia X_0 una varietà Riemanniana chiusa, di dimensione n e a curvatura negativa. Per ogni rivestimento metrico normale X di X_0, diverso dal rivestimento universale $\widetilde{X}$, si ha che $\omega(\widetilde{X}) > \omega(X)$.*

L'idea della dimostrazione è la seguente. Il gruppo $\Gamma \doteqdot Aut(X \to X_0)$ risulta essere isomorfo al quoziente del gruppo fondamentale di X_0 per quello di X e agisce tramite isometrie in modo libero e propriamente discontinuo su X. È quindi possibile identificare Γ con l'orbita Γx di un punto x di X tramite la sua azione. Scelto un particolare sottoinsieme $S \subseteq \Gamma x$ contenente il punto x si dimostra che l'entropia di S coincide con quella di X. Inoltre, posto $S^* = S \setminus \{x\}$ si definisce $l^1_\nu(S^*)$ come l'insieme delle successioni finite di elementi di S^* dotato di una particolare norma dipendente dalla costante positiva ν e si dimostra l'esistenza di un'applicazione 1-Lipschitz $j\colon l^1_\nu(S^*) \to \pi_1(X_0)$ per ν abbastanza grande. Si calcola poi l'entropia di tale spazio di successioni che risulta essere maggiore o uguale all'entropia di S con sommata una quantità positiva. Analogamente a Γ il gruppo fondamentale di X_0, isomorfo a $Aut(\widetilde{X} \to X_0)$, risulta essere immergibile in $\widetilde{X}$ ed avere entropia pari a quella di $\widetilde{X}$ quindi, grazie all'immersione 1-Lipschitz sopra menzionata, l'entropia di $\widetilde{X}$ risulta essere maggiore o uguale di quella di $l^1_\nu(S^*)$ che a sua volta è maggiore di quella di X, da cui la tesi. Peculiarità importante di questa dimostrazione è l'introduzione di un particolare prodotto, il *prodotto riflessivo*, definito tra le isometrie di $\widetilde{X}$ indotte da elementi di $\pi_1(X_0)$, ed introdotto al fine di definire l'immersione 1-Lipschitz tra lo spazio $l^1_\nu(S^*)$ ed il gruppo

fondamentale di X_0.
Grazie a tale risultato, se X è una varietà Riemanniana che riveste in modo metrico e normale una varietà Riemanniana compatta X_0, risulta possibile stimare la sistola di X in termini del *deficit asintotico*, ovvero in termini della differenza tra l'entropia del rivestimento universale $\widetilde{X}$ di X_0 e quella di X.

Al fine di mostrare esaurientemente al lettore i risultati prima espressi e le loro dimostrazioni procederemo nel modo seguente: il primo capitolo sarà dedicato ai prerequisiti necessari al secondo, tratteremo perciò la teoria dei rivestimenti, definiremo l'azione di un gruppo su uno spazio topologico e vedremo come un'azione possa determinare un rivestimento e viceversa. Nel seguito parleremo della metrica Riemanniana, definiremo quella delle lunghezze e mostreremo come queste coincidano in ambito Riemanniano; riporteremo poi alla memoria del lettore alcuni fatti fondamentali circa le varietà a curvatura costante. Successivamente faremo un breve excursus sugli spazi CAT(κ) e ne dimostreremo alcune proprietà. Definiremo poi la sistola ed il raggio di iniettività di una varietà Riemanniana e ne mostreremo il legame, riporteremo poi gli enunciati del Teorema di Cartan-Hadamard e di un teorema di confronto tra i volumi delle palle di varietà Riemanniane, teoremi che saranno indispensabili per poter giustificare le costruzioni e le stime che faremo in seguito. In conclusione al primo capitolo dimostreremo alcune proprietà trigonometriche delle varietà Riemanniane semplicemente connesse a curvatura negativa, definiremo i dominii di Dirichlet e dimostreremo alcune loro proprietà fondamentali.

Nel secondo capitolo dimostreremo alcuni lemmi tecnici riguardanti l'entropia di una varietà Riemanniana. Tali lemmi giocheranno un ruolo fondamentale per la dimostrazione del risultato principale di questa tesi che dimostreremo subito dopo. Infine parleremo delle conseguenze del teorema principale e stimeremo la sistola in funzione del deficit asintotico.

Per concludere riporteremo nel terzo capitolo un caso particolare dell'equivalente algebrico del risultato di Sambusetti.
Arzhantseva e Lysenok dimostrano infatti che l'entropia di un generico gruppo iperbolico finitamente presentato rispetto alla metrica delle parole indotta da un qualsiasi sistema finito di generatori è strettamente maggiore dell'entropia di un suo quoziente rispetto alla metrica indotta. Noi riporteremo (e dimostreremo) il risultato di Sambusetti il quale dimostra che vale la stessa proprietà per i gruppi fondamentali delle superfici compatte orientabili di genere $g \geq 2$ rispetto al sistema canonico di generatori e relazioni (tali gruppi risultano essere infatti iperbolici). Per farlo introdurremo inizialmente le definizioni ed i risultati indispensabili per la dimostrazione di tale risultato quali ad esempio le definizioni di presentazione di un gruppo, grafo di Cayley, metrica delle parole, diagrammi singolari e di Van Kampen e gruppi di piccola cancellazione. Dimostreremo poi alcuni risultati che determineranno la struttura di particolari *semplificati* dei diagrammi di Van Kampen relativi a triangoli geodetici in grafi di Cayley, struttura che ci sarà indispensabile nel corso della dimostrazione del risultato principale di questo capitolo.